Fen-Edebiyat Fakültesi	ARASINAV KAĞIDI	
Ad Soyadı:	Bölümü: Matematik	NOTU
Numarası:	Dersin Adı: Analiz IV	
İmza:	Sınav Tarihi: 27 Mart 2017	

Birinci soru zorunlu ve 40, diğer sorular 20şer puandır. Toplam 100 puanlık soru cevaplayınız. Süre 90dk.

1. $f(x,y) = \dfrac{x(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$ ve $f(0,0)=0$ fonksiyonu için aşağıdaki soruları yanıtlayın.
   (a) f, $(0,0)$'da sürekli midir?
   (b) f'in $(0,0)$ da kısmi türevlerini varsa bulun.
   (c) f'in $(0,0)$'da herhangi bir $\vec{u} = u_1 i + u_2 j$ birim vektörü yönünde yönlü türevi varsa bulun.
   (d) f, $(0,0)$'da türetilebilir midir?
2. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ türetilebilen bir fonksiyon ve $f(x,y) = g(x^2-y^2, y^2-x^2)$ ve $\dfrac{y f_x}{f_y} = kx$ ise k nedir?
3. $xyz = 1$ yüzeyinin $(1,1,1)$ noktasındaki teğet yüzeyini ve normal doğrusunu bulun.
4. $f(x,y) = 3 + x^2 + 2xy$ fonksiyonun $(1,2)$ noktasında sürekli olduğunu $\epsilon - \delta$ tanımını kullanarak gösterin.
5.
$$x^2 - y^2 + u^2 - v^2 = 0,$$
$$xyuv - 4 = 0$$

   denklemlerinin $(x,y,u,v) = (1,1,2,2)$ noktası civarında u ve v için x ve y cinsinden tek şekilde çözülebildiğini gösterin ve $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ türevlerini $(x,y) = (1,1)$ noktasında bulun.

(1) a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$?

$$|f(x,y)| = \left| x\frac{x^2}{x^2+y^2} - x\frac{y^2}{x^2+y^2} \right| \leq |x| \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| + |\cancel{y}x| \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \leq 2|x|$$

Burada $\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1$, $\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right| \leq 1$ $\forall (x,y)\neq(0,0)$ eşitsizliklerini kullandık.

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|x| = 0$ olduğundan sıkıştırma teoreminin sonucu olarak

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ bulunur.

b) $$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3/h^2}{h} = 1.$$

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0}{k} = 0$$

c) $u_1^2+u_2^2 = 1$

$$D_{\vec{u}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tu_1, tu_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{tu_1 t^2(u_1^2 - u_2^2)}{t^2(u_1^2+u_2^2)}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{u_1(u_1^2-u_2^2)}{u_1^2+u_2^2} = u_1(u_1^2-u_2^2)$$

d) $$\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{f(x,y)-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \frac{\frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} \frac{-2xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^3}{2\sqrt{2}\, x^2|x|} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|} = \text{yoktur.}$$

Türetilemez!

(2) $u = x^2 - y^2$, $v = y^2 - x^2$

$f_x = g_u u_x + g_v v_x = g_u 2x - g_v 2x = 2x(g_u - g_v)$

$f_y = g_u u_y + g_v v_y = -g_u 2y + g_v 2y = -2y(g_u - g_v)$

$\dfrac{y f_x}{f_y} = -x$ yani $k = -1$ olur.

(3) $f = xyz - 1$. $\nabla f = yz\,i + xz\,j + xy\,k$.

$\nabla f(1,1,1) = i + j + k$.

Teğet yüzey: $x - 1 + y - 1 + z - 1 = 0 \Rightarrow x + y + z = 3$.

Normal doğru: $x = 1 + t$, $y = 1 + t$, $z = 1 + t$ $t \in \mathbb{R}$.

(4) $f(x,y) = 3 + x^2 + 2xy$. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y) = 3 + 1 + 4 = 8$

$\varepsilon > 0$ verilsin, $|x-1| < \delta$ ve $|y-2| < \delta$ ve $\delta = \min\{1, \varepsilon/11\}$ olsun.

$$|f(x,y) - 8| = |3 + x^2 + 2xy - 8| = |3 + (x-1+1)^2 + 2(x-1+1)(y-2+2) - 8|$$

$$= |\cancel{3} + (x-1)^2 + 2(x-1) + \cancel{1} + 2(x-1)(y-2) + 4(x-1) + 2(y-2) + \cancel{4} - \cancel{8}|$$

$$\leq |x-1|^2 + 2|x-1| + 2|x-1||y-2| + 4|x-1| + 2|y-2|$$

$$\leq \delta + 2\delta + 2\delta + 4\delta + 2\delta = 11\delta < \varepsilon .$$

⑤ $f = x^2 - y^2 + u^2 - v^2$

$g = xyuv - 4$

$$\left| \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ xyv & xyu \end{vmatrix} = xy2u^2 + xy\,2v^2 = 2xy\,(u^2+v^2)$$

$$\left| \frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} \right|_{(1,1,2,2)} = 2\cdot(4+4) \neq 0$$

Yani denklem sistemi u ve v için çözülebilir.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow \quad 2x + 2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$yuv + xy\frac{\partial u}{\partial x}v + xyu\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$(x,y,u,v) = (1,1,2,2)$ koyarsak

$$2 + 4\,\partial u/\partial x - 4\,\partial v/\partial x = 0$$

$$4 + 2\,\partial u/\partial x + 2\,\partial v/\partial x = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-5}{4}}, \quad \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-3}{4}}$$